Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 12. Mai 2003

Analysis II

4. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 19. Mai 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

a) Wie ist $f(x,0)$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $f(0,y)$ für $y \in \mathbb{R}$ zu definieren, damit

$$f(x,y) = \frac{\cos xy - 1}{x^3 y^2} \sin x, \quad xy \neq 0,$$

sich zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen läßt?

b) Zeigen Sie, dass $f(x,y,z) = \dfrac{\cos xyz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ in $\mathbb{R}^3$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 2 $\star$

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche abgeschlossen, welche kompakt? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2 - yz} \geq 1, \cos(x+y) \leq 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x|_1 \neq 2, |x|_\infty \neq 1\}$

c) $\left\{\left(x + \sin z, \sqrt{\cosh(x+y)}\right) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2\right\}$

Aufgabe 3

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein zur x-Achse symmetrisches Gebiet (d.h. $(x,y) \in D \Leftrightarrow (x,-y) \in D$). Zeigen Sie, dass es zu $(a,b) \in D$ mit $b > 0$ einen zur x-Achse symmetrischen Weg γ gibt, der (a,b) mit $(a,-b)$ verbindet.

Aufgabe 4

Es seien (A, d_1) und (B, d_2) metrische Räume. Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in A \times B$ sei $d(x,y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ definiert. Zeigen Sie:

a) Es ist $(A \times B, d)$ ein metrischer Raum.

b) Sind (A, d_1) und (B, d_2) kompakt bzw. vollständig bzw. wegzusammenhängend, so ist auch $(A \times B, d)$ kompakt bzw. vollständig bzw. wegzusammenhängend.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`