Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 19. Mai 2003

Analysis II

5. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 26. Mai 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Es sei $A = (a_{jk})$ eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie:

a) Gilt $|a_{jk}| \leq 1$ für alle $j, k = 1, ..., n$, so folgt für alle $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$|Q_A(x)| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right)^2$$

b) Gilt $a_{jk} = 1$ für alle $j, k = 1, ..., n$, so ist Q_A positiv semidefinit.

c) A ist genau dann positiv definit, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt mit $Q_A(x) \geq \alpha |x|^2$.

Aufgabe 2

Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ und A eine $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \to 0$:

a) $\sin |x|^2 = o(|x|)$

b) $e^{a \cdot x} - 1 = O(|x|)$

c) $x^T A x = O(|x|^2)$

d) $Ax + o(|x|) = O(|x|)$

e) Ist $\varphi(x) = O(|x|^2)$, so ist $\varphi(x) = o(|x|)$.

Aufgabe 3 $\star$

Es seien (a, b), (c, d) Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $F : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y) := f(x)g(y)$ differenzierbar ist, und drücken Sie F' durch f' und g' aus.

Aufgabe 4

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar und es sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie ohne Benutzung der Kettenregel, dass $f(Ax)$ und $Af(x)$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie jeweils die Ableitung.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`