Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 26. Mai 2003

Analysis II

6. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 2. Juni 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei D ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ seien differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Das Skalarprodukt $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $(f \cdot g)' = f^T g' + g^T f'$.

b) Ist $f(x) \neq 0$ für $x \in D$, so ist die Funktion $\varphi(x) := |f(x)|$ differenzierbar in D. (Bestimmen Sie die Ableitung von φ.)

Aufgabe 2

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{R}^2$ stetig und in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle Richtungsableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial e}(x, y)$.

c) Ist f differenzierbar in $(0, 0)$? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

Aufgabe 3 $\star$

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ unstetig sind.

Aufgabe 4 $\star$

Prüfen Sie, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

a) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 e^y + \sin x \\ xy^2 z^3 e^{xy^2 z^3} \end{pmatrix}$

b) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \log\left(1 + \dfrac{xz}{1 + y^2}\right) \\ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{4}} \end{pmatrix}$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`