Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 2. Juni 2003

Analysis II

7. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis **Dienstag, 10. Juni 2003, 10.00 Uhr,** in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Prüfen Sie die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

a) $f(z) = \tan z,\ D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \dfrac{\pi}{2} \right\}$

b) $f(z) = |z|^2,\ D = \mathbb{C}$

c) $f(z) = f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2\right) + 2i \arctan \dfrac{y}{x},\ D = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0 \}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Gilt $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$?

Aufgabe 3 ⋆

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Zeigen Sie:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}$$

Aufgabe 4 ⋆

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $m \in \mathbb{N}$, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(tx) = t^m f(x)$ erfüllt ist. Zeigen Sie:

a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad m und differenzierbar, so gilt für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \cdot (\mathrm{grad}\, f(x))^T = m f(x)$$

b) Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grad 2, so gilt $f(x) = \dfrac{1}{2}\, x \cdot H_f(0)\, x$.

Hinweis zu b): Satz von Taylor

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`