Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 16. Juni 2003

Analysis II

9. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 23. Juni 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2uv \\ x^3 + y^3 &= v^3 - u^3 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(-1, 1)$ eine Funktion $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ mit $g(-1, 1) = (1, 1)$ implizit definiert wird. Berechnen Sie die Jacobimatrix von g in $(-1, 1)$.

Aufgabe 2

Es seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$ mit:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y \\ \cosh x \sin y \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Punkte aus D, in denen f lokal injektiv ist.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)^T$.

Aufgabe 3 $\star$

Gegeben seien $f(x, y, z) = xyz$ und die Menge

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5,\ xy + xz + yz = 8\}.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf K Minimum und Maximum besitzt.

b) Berechnen Sie alle Punkte in K, in denen f Minimum bzw. Maximum annimmt.

Hinweis zu a): Es gilt $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x, y, z \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`