Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 23. Juni 2003

Analysis II

10. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 30. Juni 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆ *(Höldersche Ungleichung)*

Gegeben seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f(x,y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ für $x, y > 0$. Zeigen Sie:

a) Unter der Nebenbedingung $xy = 1$ besitzt f genau in $(1,1)$ ein mögliches Extremum.

b) In $(1,1)$ liegt eine Minimalstelle vor. (*Hinweis:* Untersuchen Sie $f\left(x, \frac{1}{x}\right)$.)

c) Sind $a_j, b_j > 0$ für $j = 1, ..., n$, so gilt:
$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Hinweis zu c): Zeigen Sie die Ungleichung zuerst für $\sum_{j=1}^{n} a_j^p = \sum_{j=1}^{n} b_j^q = 1$.

Aufgabe 2 *(Methode der kleinsten Fehlerquadrate)*

Es seien A eine $(m \times n)$-Matrix mit $A^T A > 0$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Gesucht ist eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Für $m > n$ ist das Gleichungssystem überbestimmt, d.h. es existieren mehr Gleichungen als Variablen, und eine Lösung muß nicht immer existieren. Zeigen Sie, dass $f(x) = |Ax - b|^2$ genau für die Lösung von $A^T Ax = A^T b$ minimal wird.

Aufgabe 3 ⋆

Für vorgegebene Wertepaare (x_k, y_k), $k = 1, ..., n$ mit $n \geq 3$, ist die Ausgleichsgerade (Regressionsgerade) die lineare Funktion $y(x) = ax + b$, wobei a, b so gewählt sind, dass $\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$ minimal wird. Gegeben seien die Wertepaare $(-3, 6), (-1, 5), (0, 2), (2, 4)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ausgleichsgeraden $y(x) = ax + b$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ausgleichsparabel $y(x) = ax^2 + bx + c$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass folgende Mengen jeweils Nullmengen im $\mathbb{R}^2$ sind:

a) Das Sierpinski-Dreieck. (Man darf mit Dreiecken überdecken. Warum?)

b) Der Graph einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`