Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 30. Juni 2003

Analysis II

11. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 7. Juli 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben sei das Quadrat $I := [0,1] \times [0,1]$. Bestimmen Sie für $j \in \mathbb{N}$ Quadrate I_j mit der Seitenlänge r_j so, dass das Mass der Menge

$$M := I \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

größer $\frac{1}{2}$ ist und M keine inneren Punkte besitzt.

Aufgabe 2 $\star$

Zeigen Sie:

a) Sind $E \subset \mathbb{R}^n$ und $f : E \to \mathbb{R}$ messbar, so ist auch $E(f \leq c)$ messbar ($c \in \mathbb{R}$).

b) Ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, so ist $f^2 \in L(\mathbb{R}^n)$.

Zusatz: Bleibt die Aussage in b) richtig, wenn auf die Beschränktheit verzichtet wird?

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $f \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\displaystyle\int f = 0$ b) $f = 0$ f.ü.

Hinweis: Schauen Sie in Ihre Mitschrift zur Vorlesung Analysis I.

Aufgabe 4 $\star$

Begründen Sie jeweils, warum $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ist, und bestimmen Sie die iterierten Integrale:

$$\int \left(\int f(x,y)\, dx \right) dy \qquad \int \left(\int f(x,y)\, dy \right) dx$$

a) $f(x,y) = 2ye^{-x-y^2}$ falls $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $f(x,y) = 0$ sonst.

b) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ falls $|x| + |y| < 1$, $f(x,y) = 0$ sonst.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`