Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 14. Juli 2003

Analysis II

13. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 21. Juli 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate* $L \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Punkte, für die das Produkt der Abstände von den Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ den Wert a^2 besitzt.

a) Skizzieren Sie L und zeigen Sie $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$.

b) Beschreiben Sie das Innere der rechten *Schlaufe* von L durch Polarkoordinaten.

c) Welche Fläche schließt diese Schlaufe ein?

Aufgabe 2 $\star$

Berechnen Sie das Trägheitsmoment $\displaystyle\int_K \left(x^2 + y^2\right) d(x, y, z)$ bzgl. der z-Achse für:

a) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$

b) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$

Aufgabe 3

Es seien $a, b, c \neq 0$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der folgenden Menge:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$$

Aufgabe 4

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesque-integrierbar?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{für } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\beta} & \text{für } 1 < |x| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ändert sich das Ergebnis, wenn $|\cdot|$ durch eine andere Norm des $\mathbb{R}^n$ ersetzt wird?

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`