Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 26. Mai 2003, 12:00 Uhr

Lineare Algebra II - Übungsblatt 4

Aufgabe 1: (Kinobesucher: Wieviel kostet eine große Portion Fibonaccos? - Verkäufer: So viel wie eine kleine und eine mittlere Portion.) Berechnen Sie A^{100}, B^{100}, C^{100} und D^{100} (ohne Computer):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (Was ist ein Dilemma? - Ein Lemma mit zwei Ergebnissen.)
a) Bestimmen Sie die Minimalpolynome der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Erläutern Sie, wie sich die Einsen auf das Minimalpolynom auswirken.

Aufgabe 3: (Jordan-Normalform: 30 Punkte, 12 Rebounds, 8 Assists, ...) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (...3 Blocks) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $\mu_f(x) := (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_m)^{d_m}$ sein Minimalpolynom; dabei seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Zeigen Sie für $i \in \{1, \ldots, m\}$, dass der größte Jordanblock zum Eigenwert λ_i eine $d_i \times d_i$ Matrix ist.

Aufgabe 5 (*): (Young man, in mathematics you don't understand things, you just get used to them. - John von Neumann) Schreiben Sie ein MAPLE-Programm *MinPoly(M)*, welches das Minimalpolynom einer Matrix $M \in Mat_n(\mathbb{Q})$ berechnet (genauer: das Minimalpolynom des Endomorphismus $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n, x \mapsto M\,x$). Berechnen Sie dazu nacheinander die Potenzen M^k, $k = 2, 3, \ldots$ und prüfen Sie jeweils, ob die Familie $I_n, M, M^2, \ldots, M^k$ linear unabhängig ist. (Tipp: Der MAPLE-Befehl *Flatten* konvertiert eine $n \times n$ Matrix in einen Vektor mit n^2 Komponenten.)