Algebra I
Übungsblatt 13

I wrote this book for myself.

I wanted to piece together carefully my own path through Galois Theory, a subject whose mathematical centrality and beauty I had often glimpsed, but one which I had never properly organized in my own mind. I wanted to start with simple, interesting questions and solve them as quickly and directly as possible. [...] Thus, I approached this project as an inquirer rather than an expert, and I hope to share some of the sense of discovery and excitement I experienced. There is great mathematics here.

In particular, the book presents an exposition of those portions of classical field theory which are encountered in the solution of the famous geometric construction problems of antiquity and the problem of solving polynomial equations by radicals.

Charles Hadlock: Field theory and Its Classical Problems

Ein System A von reellen oder komplexen Zahlen a soll ein Körper heißen, [...]*

* *[...] Dieser Name soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in der Geometrie und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Vollkommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als ein organisches Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint. Anfangs, in meinen Göttinger Vorlesungen (1857 bis 1858), hatte ich denselben Begriff mit dem Namen eines* rationalen Gebietes *belegt, der aber weniger bequem ist. [...]*

Richard Dedekind: Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen

Aufgabe 1: [Fortsetzung der Aufgabe 4 von Blatt 12] Es wurde bereits gezeigt

$$h := \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2} \in F \ .$$

Zeigen Sie $F = K(h)$. (Tipp: Verwenden Sie Theorem 15.11 und eine obere Abschätzung für $[L : K(h)]$)

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ des Polynoms $f := x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ nach folgender Anleitung:

(a) Zeigen Sie, f ist irreduzibel und separabel. Welche Aussagen von Bemerkung 15.6 gelten für f?

(b) Nach geeigneter Nummerierung gilt $\sigma := (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in \mathrm{Gal}(f)$ (Zykelschreibweise).

(c) f besitzt genau drei reelle Nullstellen (Tipp: f' betrachten).

(d) $\mathrm{Gal}(f)$ enthält eine Transposition $(a\ b)$ (Tipp: Komplexe Konjugation). Es gibt eine Potenz $\sigma^n = (a\ b\ c\ d\ e)$.

(e) S_5 wird von $(a\ b)$ und $(a\ b\ c\ d\ e)$ erzeugt. $\mathrm{Gal}(f) = S_5$.

Aufgabe 3: Sei $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit Primzahl p und $L := K(x, y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten x und y. Zeigen Sie:

(a) $L^p = K(x^p, y^p)$ und $[L : L^p] = p^2$.

(b) $L = \bigcup_{a \in L \setminus L^p} L^p(a)$ und dabei ist $[L^p(a) : L^p] = p$.

(c) Ein Vektorraum ist keine Vereinigung endlich vieler echter Unterräume.

(d) $L|L^p$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper.

Aufgabe 4: Wahr oder falsch?

(a) Jeder injektive K-Homomorphismus ist ein K-Automorphismus.

(b) Jede endliche Körpererweiterung hat eine normale Hülle.

(c) Jede Erweiterung eines Körpers mit Charakteristik 0 ist normal.

(d) Eine Körpererweiterung mit Galoisgruppe der Ordnung 1 ist normal.

(e) Eine endliche, separable, normale Körpererweiterung besitzt eine endliche Galoisgruppe.

(f) Jede Galoisgruppe ist abelsch.

(g) Eine Galoiserweiterung $L|K$ mit $[L : K] = n$ besitzt eine Galoisgruppe der Ordnung n.

(h) Die Galoisgruppe einer normalen Körpererweiterung ist zyklisch.