

Algebra I Übungsblatt 2

Many [problems] are introduced not so much to be solved as to be tackled. The value of a problem is not so much in coming up with the answer as in the ideas and attempted ideas it forces on the would-be solver. . . . Problems, which for some reason or other seem hard to me, are often starred (sometimes with two stars). However, even here there will be no agreement among mathematicians; many will feel that some unstarred problems should be starred and vice versa.)

(I. N. Herstein: Topics in Algebra)

Aufgabe 1: In beiden (voneinander unabhängigen) Aufgabenteilen sei G eine multiplikative Halbgruppe.

- a) Es gebe ein linksneutrales Element e , d.h. $ea = a$ für alle $a \in G$, und zu jedem $a \in G$ gebe es ein linksinverses Element a' , also $a'a = e$. Zeigen Sie, dass dann G eine Gruppe ist.
- b) Die Gleichungen $ax = b$ und $yc = d$ seien für alle $a, b, c, d \in G$ eindeutig lösbar. Zeigen Sie, dass dann G eine Gruppe ist.

(Tipp: Formulieren Sie jeweils zunächst genau, was zu zeigen ist.)

Aufgabe 2:

- a) Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass die Ordnung von H die Ordnung von G teilt.
- b) Sei G eine Gruppe und H eine endliche Teilmenge von G , die bezüglich der Gruppenverknüpfung abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe ist.

Aufgabe 3: Basteln Sie ein Modell des Oktaeders (vgl. Anleitung in der Übung). Wieviele Symmetrien besitzt das Oktaeder?

Aufgabe 4: Sei (G, \cdot) eine abelsche Gruppe.

- a) Seien $a, b \in G$ mit endlichen, teilerfremden Ordnungen k bzw. l . Zeigen Sie, dass $a \cdot b$ die Ordnung kl besitzt.
- b) Sei $a \in G$ und p ein Primteiler der Ordnung von a . Zeigen Sie, dass es ein Element mit Ordnung p gibt.

Aufgabe 5:

- a) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elements von $\mathbb{Z}/(12\mathbb{Z})$.
- b) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elements der Kleinschen Vierergruppe.
- c) (*) Sei (G, \cdot) eine endliche abelsche Gruppe. Weiter habe für jede positive ganze Zahl k die Gleichung

$$x^k = 1$$

höchstens k Lösungen in G . Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.