Algebra I
Übungsblatt 5

We have seen that the direct product gives us a method of constructing large groups from smaller groups. But ... it is of no use for constructing non-Abelian groups from Abelian groups. ... we shall look at a generalization of the direct product which enables us to do this. This generalization, called the semi-direct product, is not easy to describe, so we shall look at some examples ... The problem we set out to answer ... is: given that $G/N \cong K$, just how much do we know about G if we know K and N? ... we can find one G that fits the bill, namely the direct product, $N \times K$. But there may be other possibilities for G. Indeed, the semi-direct product will give us some other groups G, although we shall not necessarily find all the possibilities.

(The Open University: Automorphism Groups)

Starting with an arbitrary group, it is frequently useful to examine not the whole group, but an Abelian homomorphic image. After all, Abelian groups are much easier to deal with than non-Abelian groups. The commutator subgroup of a group is the smallest normal subgroup such that the quotient group is Abelian.

The name commutator is derived from the form of the generating elements of the subgroup. If G is Abelian, then ... $xyx^{-1}y^{-1} = e$. On the other hand, if G is not Abelian, $xyx^{-1}y^{-1}$ may not be equal to e, but can be used to measure "how far" G is from being Abelian. Any element of G which can be written as $xyx^{-1}y^{-1}$ is called a commutator. By factoring out a normal subgroup which contains all the commutators, we remove all the non-Abelian-ness of G (if any), and so we expect the quotient to be Abelian.

(The Open University: Group Morphisms)

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$. Seien $V := (\{e, a, b, c\}, \cdot)$ die abstrakte Kleinsche Vierergruppe und

$$\sigma\colon a \mapsto a,\ \ b \mapsto c,\ \ c \mapsto b$$

ein Automorphismus von V. Sei weiter $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(V),\ \bar{1} \mapsto \sigma$. Geben Sie konkret die Verknüpfungsvorschrift des semidirekten Produkts $V \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ an und stellen Sie die Gruppentafel auf. Ist $V \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ abelsch? Bestimmen Sie den Exponenten der Gruppe. Ist $V \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ isomorph zum direkten Produkt $V \times \mathbb{Z}_2$?

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

a) Die Gruppe S_n wird von den $n-1$ Transpostionen $(12), (13), \ldots, (1n)$ erzeugt.

b) Sei $n \geq 3$. Die alternierende Gruppe $A_n \subset S_n$ wird von den $n-2$ Dreierzyklen $(123), (124), \ldots, (12n)$ erzeugt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_4 nur zwei nicht-triviale Normalteiler besitzt, nämlich die alternierende Gruppe A_4 und $V := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Zu welcher Gruppe ist V isomorph? Zu welcher Gruppe ist S_4/V isomorph?
Tipps: Sei $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden:

1. Jede Permutation in S_4 lässt sich in einer der folgenden disjunkten Zykeldarstellungen schreiben

$$(i)(j)(k)(l),\ (i)(j)(kl),\ (ij)(kl),\ (i)(jkl),\ (ijkl)\ .$$

   Beachten Sie, ein 1-Zykel beschreibt die Identität, $(m) = id$.

2. Für paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ und $\sigma \in S_n$ gilt

$$\sigma(i_1 \ldots i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_r))\ .$$

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe. Die Untergruppe $G' := \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\rangle$ heißt *Kommutatorgruppe* von G. Zeigen Sie:

a) Die Kommutatorgruppe G' ist ein Normalteiler und die Faktorgruppe G/G' ist abelsch.

b) Sei N ein Normalteiler von G. Ist die Faktorgruppe G/N abelsch, so gilt $G' \subseteq N$.

Aufgabe 5 (*): (*Normalformensatz für freie Gruppen*)
Sei $\Sigma \neq \emptyset$. Betrachten Sie die Äquivalenzrelation auf Σ^*, die durch die elementaren Reduktionsschritte erzeugt wird (vgl. Definition 4.15 und Notationen im Anschluss von Satz 4.16 der Vorlesung). Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse genau ein reduziertes Wort enthält.

Tipp: Eine Lösungsmöglichkeit verwendet u.a. die folgenden Schritte.

1. Jedes Wort kann in endlich vielen Reduktionsschritten in ein reduziertes Wort übergeführt werden.

2. Zwei Ketten von Reduktionsschritten

$$w \to w_1 \to \ldots \to w_r \quad \text{und} \quad w \to v_1 \to \ldots \to v_{r+s} \qquad , r \geq 1,\ s \geq 0$$

   lassen sich ergänzen (vgl. Spezialfall unten), so dass sie zu demselben Wort führen. Spezialfall: Sind $w \to w_1$ und $w \to v_1$ Reduktionsschritte, so gilt entweder $w_1 = v_1$ oder es gibt ein Wort $\tilde{w}$ und Reduktionsschritte $w_1 \to \tilde{w}$ und $v_1 \to \tilde{w}$ (Das Reduktionsschema heißt deshalb *konfluent*).