Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: Briefkasten 63, 9. Dezember 2003, 12:00 Uhr

Algebra I
Übungsblatt 8

... when G is a group and H is a subgroup of G of finite index, it is always possible to choose a set of left coset representatives (a left transversal) which is simultaneously a set of right coset representatives (a right transversal). The interested reader can look for the result known as Hall's marriage theorem which gives necessary and sufficient conditions for a set of n women to be able to marry (monogamously and simultaneously) n men in such a way that at least the women are initially happy. In what passes for group theoretic reality, the women are the left cosets of H in G and the men are the right cosets of H in G.

(Geoff Smith, Olga Tabachnikova: Topics in Group Theory)

(Origami) In the traditional art of paper folding, you start with a square piece of paper. Consider the corners and the edges to be given. You get new points and lines as images of previously constructed points and lines by the following three operations (the "restricted" rules of origami):

(1) Make a fold passing through two given points.

(2) Make a fold that places one known point on another known point.

(3) Make a fold that places a known line on another known line.

... In practice, most origami constructions make use of a fourth rule (the "general" rules of origami), namely

(4) Make a fold through a given point that places another given point on a given line.

(Robin Hartshorne: Geometry: Euclid and beyond)

Aufgabe 1: Falten Sie nach der folgenden Origami-Anleitung ein **quadratisches** Stück Papier (**Anmerkung:** Nach jeder Faltung wird das Papier wieder auseinandergefaltet; die Faltlinie bleibt erkennbar.). Die Ecken des Papiers seien A,B,C und D (Bezeichnung gegen den Uhrzeigersinn).

1. Falte A auf B. Sei E der Schnittpunkt der Faltlinie mit $\overline{AB}$.
2. Falte B auf E. Sei g die erhaltene Faltlinie.
3. Falte im Punkt E, so dass A auf g liegt. Bezeichne den so erhaltenen Punkt auf $\overline{AD}$ mit F.
4. Falte $\overline{EB}$ auf $\overline{EF}$. Bezeichne den so erhaltenen Punkt auf $\overline{BC}$ mit G.
5. Falte entlang $\overline{FG}$.

Begründen Sie, dass E,F und G die Eckpunkte eines gleichseitigen [!] Dreiecks sind.

Aufgabe 2: Falten Sie ein regelmäßiges Fünfeck in ein quadratisches Stück Papier, beschreiben Sie den Faltvorgang und erklären Sie, warum er tatsächlich ein regelmäßiges Fünfeck liefert. (Tipp: Eine Seite eines einbeschriebenen Pentagons [alle Ecken liegen auf den Papierkanten, eine Seite ist parallel zu einer Papierkante] hat die Länge $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.) (**Bringen Sie drei, nicht zu kleine, quadratische Stücke Papier zur Übungsstunde.**)

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle Ringe mit der Eigenschaft, dass jede additive Untergruppe bereits ein Ideal ist. (Tipp: Betrachten sie in dem zu untersuchenden Ring den Primring.)

Aufgabe 4: Sei $\mathbb{Q}[x]$ der Ring der Polynome mit rationalen Koeffizienten und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ die Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ durch Adjunktion von $\sqrt[3]{2}$.

a) Zeigen Sie, es gibt einen eindeutigen Ring-Homomorphismus $\Phi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ mit $x \mapsto \sqrt[3]{2}$.

b) Bestimmen Sie den Kern von Φ. (Tipp: $\mathbb{Q}[x]$ ist Hauptidealring.)

c) Bestimmen Sie das Bild von Φ. (Tipp: Zeigen Sie, dass das Inverse jedes von null verschiedenen Bildelements auch ein Bildelement ist.)

d) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ an.

Aufgabe 5: Sei Q die Menge aller Symbole $\alpha := \alpha_0 + \alpha_1\, i + \alpha_2\, j + \alpha_3\, k$, wobei $\alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ seien. Definiere die Addition

$$\alpha + \beta := (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)i + (\alpha_2 + \beta_2)j + (\alpha_3 + \beta_3)k$$

und die Multiplikation

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta \;\; := \;\; & (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i \\ & + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)j + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)k \;. \end{aligned}$$

Mit diesen Verknüpfungen bildet Q den *reellen Quaternionenring.*

a) Zeigen Sie, dass Q ein Einselement besitzt.

b) Zeigen Sie durch Aufstellen der Gruppentafel, dass $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ eine 8-elementige multplikative Untergruppe bildet (*Quaternionengruppe*). Ist der Ring Q kommutativ?

c) Zeigen Sie, dass jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist.