Prof. Dr. J. Stöckler | Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

1. Blatt Programmierpraktikum
WS 2003/04 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Testierungstermin ist Donnerstag, 30.10.03, 14:00-17:00, M944.
Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/num/NP/index.html`

Aufgabe 1 Gegeben seien ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$ mit reellen Koeffizienten und $x_0 \in \mathbb{R}$.
a) Das Horner-Schema wertet das Polynom $p(x)$ and der Stelle $x = x_0$ aus. Es geschieht entsprechend der Klammerung

$$p(x_0) = (((a_n \cdot x_0 + a_{n-1})\, x_0 + a_{n-2})\, x_0 + \ldots + a_0)$$

die dem Algorithmus

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
	$+a'_n x_0$	$+a'_{n-1} x_0$	$\ldots$	$+a'_2 x_0$	$+a'_1 x_0$
$a_n =: a'_n$	a'_{n-1}	a'_{n-2}	$\ldots$	a'_1	$a'_0 = p(x_0)$

zugrundeliegt. Programmieren Sie eine Matlab-Funktion 'horner.m', deren Eingabe aus dem Zeilenvektor der Polynomkoeffizienten $[a_n, \ldots, a_0]$ und einem Array `X` von x_0-Werten besteht. Die Ausgabe soll einen Array `Y` der zugehörigen Funktionswerte liefern. Zeichnen Sie den Graphen des Polynoms $p(x) = (x-2)^9$ für $x \in [1.92, 2.08]$ mit dem Schritt $h = 2 \cdot 10^{-5}$: Einmal als Potenz und in der Monomdarstellung

$$p(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$$

mit bzw. ohne Verwendung des Horner-Schemas.
b) Das Horner-Schema liefert die Entwicklung

$$p(x) = a'_0 + (x - x_0)(a'_n x^{n-1} + a'_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a'_1).$$

Daraus folgt

$$p'(x_0) = a'_n x_0^{n-1} + a'_{n-1} x_0^{n-2} + \ldots + a'_1.$$

Der Wert $p'(x_0)$ lässt sich also durch erneute Anwendung des Schemas berechnen. Mit

$$a''_j := a'_j + a''_{j+1} x_0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n-1 \quad \text{und} \quad a''_n := a'_n$$

kommt man zur Darstellung

$$p(x) = a_0' + (x - x_0)a_1'' + (x - x_0)^2(a_n''x^{n-2} + a_{n-1}''x^{n-3} + \ldots + a_2'')$$

d.h. $\dfrac{1}{2}p''(x_0) = a_n''x^{n-2} + a_{n-1}''x^{n-3} + \ldots + a_2''$ usw. Das vollständige Horner-Schema liefert also das Taylor-Polynom des Polynoms p

$$p(x) = a_0' + (x - x_0)a_1'' + (x - x_0)^2 a_2''' + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt x_0.
Programmieren Sie eine Matlab-Funktion 'horner_taylor.m', die das vollständige Horner-Schema realisiert.
Literatur: Hämmerlin G., Hoffmann K.-H. 'Numerische Mathematik', Springer Verlag, 1989.

Aufgabe 2

a) Programmieren Sie eine Matlab-Funktion 'LUdecomp.m', die die Gauss'sche LU-Zerlegung ohne Pivotisierung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in eine untere normierte Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix U realisiert. Die LU-Zerlegung lässt sich mit drei Schleifen implementieren; dabei dürfen nur elementare Matrix-Zugriffsoperationen verwendet werden. Die Eingabe von 'LUdecomp.m' ist die Matrix A.
b) Programmieren Sie eine weitere Matlab-Funktion 'LUdecomp_opt.m' mit den gleichen Ein- und Ausgabeparametern wie in 'LUdecomp.m', indem Sie möglichst viele innere Schleifen der verschiedenen Schleifen-Varianten aus 'LUdecomp.m' durch Matlab-Routinen ersetzen. Falls keine geeignete 'Vektorisierung' der Schleifen möglich erscheint, soll dies durch eine entsprechende Meldung gekennzeichnet werden. Führen Sie Laufzeittests durch und ermitteln Sie die schnellste Variante. Markieren Sie diese Variante dann an entsprechender Stelle in Ihrer Programm-Kommentierung.
c) Gegeben seien $A = \begin{bmatrix} 10^{-16} & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $a = 1, 0, -1$. Berechnen Sie die Konditionszahl und die LU-Zerlegung der Matrizen A zum einen mit Hilfe von 'LUdecomp_opt.m' und zum anderen mit der Matlab-Routine 'lu.m'. Vergleichen Sie die Ergebnisse.