

**2. Blatt Programmierpraktikum**  
**WS 2003/04 (Stöckler/Charina-Kehrein)**

Testierungstermin ist Mittwoch, 12.11.03, 14:00-19:00, M944.

Internetseite:

[www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/num/NP/index.html](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/num/NP/index.html)

**Aufgabe 1** Jede  $n \times n$  Matrix  $A$  kann als Matrixprodukt  $A = UDV$  mit orthogonalen Matrizen  $U$  und  $V$  sowie  $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ , den 'Singulärwerten' von  $A$ , geschrieben werden. Für reguläres  $A$  gilt dann  $\text{cond}_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ . Um eine orthogonale  $n \times n$  Matrix zu erzeugen, konstruiert man

$$H_n \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & H_{n-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

wobei  $I_k$  eine  $k \times k$  Einheitsmatrix und  $H_k, k = 1, \dots, n$ , eine  $k \times k$  Householder-Matrix sind. Eine Householder-Matrix ist eine Matrix der Form

$$H_k = I_k - 2v_k v_k^T, \quad v_k \in \mathbb{R}^k, \quad \|v_k\|_2 = 1.$$

Eine solche Matrix  $H_k$  ist symmetrisch und orthogonal, deshalb ist ein Produkt von solchen Matrizen auch eine orthogonale Matrix.

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion 'RandomMatrix.m', die eine zufällige  $n \times n$  Matrix ( $n \geq 2$ ) zu vorgegebener Diagonalmatrix  $D$  erzeugt. Als Eingabeparameter verwende man entweder die Konditionszahl und die Dimension  $n$  oder den Vektor  $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ . Im Fall, wenn die Eingabeparameter die Konditionszahl  $\text{cond}_2(A)$  und die Dimension  $n$  sind, sollen die Singulärwerte  $\sigma_k$  nach der Formel

$$\sigma_k = \text{cond}_2(A)^{\frac{n-k}{n-1}}, \quad k = 1, \dots, n$$

bestimmt werden. Sodann ist  $D$  (von links und rechts) mit zufälligen Matrizen  $U$  und  $V$  zu multiplizieren, wobei  $U$  und  $V$  wie in (1) durch Zufallsvektoren  $v_2, \dots, v_n$  und zufällige Wahl des Vorzeichens  $\pm 1$  gebildet werden. Die Multiplikation mit der Matrix  $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_k \end{bmatrix}$  soll möglichst effizient erfolgen.

## Aufgabe 2

a) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Schreiben Sie eine Matlab-Funktion 'SystemSolver.m', die das System  $Ax = b$  mit Hilfe von entweder 'LUZerlegung\_opt.m' oder 'lu.m' löst, je nachdem ob der Eigabeparameter 'pivot' 0 oder 1 ist.

b) Sei  $A$  eine  $n \times n$  tridiagonale Matrix. Um für diese tridiagonale Matrix  $A$  eine LU-Zerlegung zu erhalten, besteht eine Möglichkeit darin,  $A$  wie folgt zu zerlegen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & f_1 & & & & \\ e_2 & d_2 & f_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & e_{n-1} & d_{n-1} & f_{n-1} & \\ & & & e_n & d_n & \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & & \\ & \ell_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ell_n & 1 & \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & f_1 & & & & \\ & u_2 & f_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & u_{n-1} & f_{n-1} & \\ & & & & u_n & \end{bmatrix}}_U.$$

Die Elemente  $u_i$  und  $\ell_i$  werden wie folgt bestimmen

$$u_1 = d_1, \\ \ell_i = \frac{e_i}{u_{i-1}}, \quad u_i = d_i - \ell_i f_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion 'TridiagSolver.m', die das System  $Ax = b$  für eine tridiagonale Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit Hilfe der obigen LU-Zerlegung löst.

c) Lösen Sie  $Ax = b$  für die  $50 \times 50$  Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & & \\ 8 & 6 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 8 & 6 & 1 \\ & & & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ \dots \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{50}$$

zum einen mit Hilfe von 'SystemSolver.m' und zum anderen mit 'TridiagSolver.m'. Vergleichen Sie die Ergebnisse.