

Numerische Mathematik I

1. Übung

Aufgabe 1

- (i) Zeichnen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.
- (ii) Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}^n$ und die Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ gilt:
- (a) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$,
- (b) $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$,
- (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$$

submultiplikativ und verträglich mit $\|\cdot\|_2$ ist.

Aufgabe 3

Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Inverse A_i^{-1} , $i = 1, 2$, und die jeweiligen Konditionszahlen $cond_1$, $cond_\infty$.

Aufgabe 4

Lösen Sie die Gleichungssysteme

- (i) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.393 & 3.363 \\ 0.985 & 2.378 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.154 \\ 0.816 \end{pmatrix},$$

- (ii) $Ax = b^*$ mit A , x wie in (i) und $b^* = (1.154, 0.815)^T$.

Abgabe: Donnerstag, den 23.10.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.