Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. L. Beutel
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 17.12.2003

Numerische Mathematik I

10. Übung

Aufgabe 37
Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ auf $C[-1,1]$ sei gegeben durch

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx$$

mit der Gewichtsfunktion w (d.h. $w(x) > 0$ und stetig in $(-1,1)$, w integrierbar auf $[-1,1]$). Zeigen Sie:

(i) Es existiert genau ein Polynom $q_k \in \mathcal{P}_k$ mit Leitkoeffizient 1, das orthogonal zu allen Polynomen aus $\mathcal{P}_{k-1}$ ist.

(ii) Falls w gerade ist, so ist q_{2k} eine gerade und q_{2k-1} eine ungerade Funktion.

Aufgabe 38
Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome T_n, $n \in \mathbb{N}$, die folgende Darstellung haben:

$$T_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\}, & |x| \le 1 \quad , \\ \frac{1}{2}\{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\}, & |x| \ge 1 \quad . \end{cases}$$

Tipp: Verwenden Sie die Rekursionsformel der Tschebyscheff-Polynome.

Aufgabe 39
Bestimmen Sie die Gauß–Approximation $g \in \mathcal{P}_3[-1,1]$ zur Funktion $f(x) = e^x$ bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. (Somit wird g mit Hilfe der Legendre–Polynome bestimmt).

Aufgabe 40
Sei $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ und $U := \{u \in \mathcal{P}_2 | u = a + bx^2\} \subset C[0,1]$.

(i) Zeigen Sie, dass U die Haarsche Bedingung auf $[0,1]$ erfüllt.

(ii) Bestimmen Sie ein $h_0 \in U$ und ein Extremum $\xi \in (0,1)$ der Fehlerfunktion, so dass gilt:

$$(f - h_0)(0) \;=\; -(f - h_0)(\xi) \;=\; (f - h_0)(1).$$

(iii) Zeigen Sie: h_0 ist beste Approximation (in der Maximumnorm) in U an f.

Abgabe: Donnerstag, den 8.01.2004, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr !