Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. L. Beutel
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 7.1.2004

Numerische Mathematik I

11. Übung

Aufgabe 41 Es gilt $\int_0^1 \sin(\sqrt{x})\ dx = 0.6023373\ldots$ (ohne Beweis).

(i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x})\ dx = \int_0^1 (\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x})\ dx + \frac{2}{3}.$$

(ii) Verwenden Sie die summierte Trapezregel für $N = 1, 2, 4$ (mit dem Computer bietet es sich an, auch größere N zu betrachten), um Näherungen für

(a) $\int_0^1 \sin(\sqrt{x})\ dx$

(b) $\int_0^1 (\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x})\ dx + \frac{2}{3}$

zu bekommen. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 42

(i) Zeigen Sie, dass die zweite Spalte des Romberg-Schemas der summierten Simpson-Regel entspricht.

(ii) Bestimmen Sie eine Näherung für den Wert des Integrals $\int_0^1 (\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x})\ dx$, indem Sie mit dem Romberg-Verfahren $a_{3,3}$ berechnen.

Aufgabe 43 Bestimmen Sie für $n = 2$ die Knoten und Gewichte der Gauß-Legendre-Quadraturformel auf dem Intervall $[a, b] = [-1, 1]$.

Aufgabe 44

(i) Die Quadraturformel $I_n f = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k)$ sei exakt für Polynome vom Grad $\leq m$. Zeigen Sie, dass für $f \in C^{m+1}$ gilt:

$$Rf := \int_a^b f(x)\ dx - I_n f = \int_a^b f^{(m+1)}(t) K_m(t)\ dt,$$

mit dem *Peano-Kern* $K_m(t) := \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x_k - t)_+^m$.

Hinweis: Für $x \in [a, b]$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x-t)_+^m\ dt$ (Taylorformel).

(ii) Berechnen Sie die stückweise polynomiale Form von $K_3(t)$ für die Simpson-Regel auf dem Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ und zeigen Sie, dass $K_3(t) \leq 0$ gilt für alle $t \in [-1, 1]$.

(iii) Beweisen Sie, dass für K_3 aus (ii) Folgendes gilt:

$$Rf = f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^1 K_3(t)\ dt = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } -1 < \xi < 1.$$

Abgabe: Donnerstag, den 15.1.2004, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.