Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. L. Beutel
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 14.01.2004

Numerische Mathematik I

12. Übung

Aufgabe 45 Die Legendre–Polynome L_n auf $[-1,1]$ seien über die Rekursionsformel definiert (s. Vorlesung). Zeigen Sie:

a) Das Legendre–Polynom L_n besitzt die Darstellung

$$L_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

(s.g. Rodriguez–Formel).

b) Die Nullstellen $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$ des Legendre–Polynoms L_n trennen die Nullstellen $x_1^{(n+1)} < x_2^{(n+1)} < \cdots < x_{n+1}^{(n+1)}$ des Legendre–Polynoms L_{n+1}, d.h.

$$x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n+1)} < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Rekursionsformel.)

Aufgabe 46 Sei $I := \int_0^1 \sqrt{|x-0.7|}\,dx$.

a) Berechnen Sie den genauen Wert von I.

b) Geben Sie mit Hilfe der Gauß–Legendre–Quadraturformel für $n = 2$ (s. Aufgabe 43) einen Näherungswert für I an. (Hinweis: Koordinatentransformation.)

c) Berechnen Sie mit demselben Verfahren wie in b) Näherungswerte an die Teilintegrale

$$I_1 := \int_0^{0.7} \sqrt{0.7-x}\,dx \quad \text{und} \quad I_2 := \int_{0.7}^1 \sqrt{x-0.7}\,dx.$$

d) Vergleichen Sie die Resultate von a), b) und c).

Aufgabe 47 Zeigen Sie:

(i) $\cos(x)$ hat in $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ keinen Fixpunkt.

(ii) $\cos(x)$ erfüllt auf dem Intervall $[-1,1]$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

b.w.

(iii) Die Iteration $x_{k+1} := \cos(x_k)$ konvergiert für <u>jeden</u> beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen $x^\star \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x^\star) = x^\star$.

Starten Sie die Iteration mit $x_0 = 0$ und brechen Sie ab, sobald für ein x_k die Bedingung $|x_k - x^\star| < 10^{-5}$ gesichert ist.

Aufgabe 48 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Zeigen Sie, dass das Heron–Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$, beschrieben durch die Rekursion $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left\{x_k + \frac{a}{x_k}\right\}$ mit Startwert $x_0 > 0$, folgende Eigenschaften besitzt:

(i) Die Iterations**teilfolge** $\{x_k\}_{k\geq 1}$ konvergiert monoton für alle Startwerte $x_0 > 0$.

(ii) Für alle Startwerte $x_0 > 0$ konvergiert das Verfahren gegen $\sqrt{a}$.

(iii) Das Verfahren konvergiert quadratisch, genauer gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \sqrt{a}|}{|x_k - \sqrt{a}|^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(iv) Berechnen Sie für $a = 2$, $x_0 = 1$ die ersten 4 Iterationswerte.

Abgabe: Donnerstag, den 22.01.2004, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.