

Numerische Mathematik I

13. Übung

Aufgabe 49 Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \sin x - 1$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ jeweils 10 Iterierte des modifizierten Newton-Verfahrens für $\lambda = 1, 2, 3$. Wie groß ist die jeweilige Konvergenzordnung?

Aufgabe 50 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Eine symmetrische Matrix D mit $D \cdot D = A$ nennt man Quadratwurzel von A . Zur Bestimmung von D betrachtet man die Abbildung

$$g(X) = \frac{1}{2}(X^2 + B), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

mit der Matrix $B := I - A$ (I die Einheitsmatrix). Es gelte nun $\|B\| =: q < 1$ für eine passende Matrixnorm.

(i) Zeigen Sie, dass g eine Kontraktion der abgeschlossenen Teilmenge

$$K_q(0) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \|X\| \leq q\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$$

in sich ist. Damit existiert also nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau ein Fixpunkt $Z \in K_q(0)$ von g .

(ii) Zeigen Sie, dass $I - Z$ Quadratwurzel von A ist.

(iii) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, wobei $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen sei.

Führen Sie drei Schritte der Iteration $X^{(t)} := g(X^{(t-1)})$ durch, verwenden Sie dabei die Nullmatrix als Startwert $X^{(0)}$ und führen Sie eine Fehlerabschätzung durch. Berechnen Sie anschliessend $(I - X^{(3)})^2$.

Aufgabe 51 Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 4x_1^3 & = & 27x_1x_2^2 - 25 \\ 4x_1^2 & = & 3x_2^3 + 1 \end{cases}$$

besitzt eine Lösung in der Nähe der Stelle $(1, 1)$.

Führen Sie zur Berechnung verbesserter Näherungen zwei Schritte des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 1)^T$ durch. Überprüfen Sie, ob die zweite Näherung $x^{(2)}$ eine gute Approximation der gesuchten Lösung ist.

b.w.

Aufgabe 52 Die in $0.7 \leq x_1 \leq 0.9$, $0.7 \leq x_2 \leq 0.9$ liegende Lösung des transzendenten Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{10}x_1^2 + \sin(x_2) \\ x_2 &= \cos(x_1) + \frac{1}{10}x_2^2 \end{cases}$$

ist durch Iteration zu berechnen. Welche Konvergenzaussagen gestatten die Lipschitzkonstanten $\|\Phi'\|_p$ für $p = 1, \infty, F$? Berechnen Sie die Lösungskomponenten auf $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ genau.

Hinweis: Die Voraussetzungen des lokalen Konvergenzsatzes stellen sich erst nach einigen Schritten ein.

Abgabe: Donnerstag, den 29.01.2004, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.