Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. L. Beutel
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 22.10.2003

Numerische Mathematik I

2. Übung

Aufgabe 5

a) Beweisen Sie, dass $cond(A) \geq 1$ und $cond(\alpha A) = cond(A)$ für beliebige reguläre Matrizen A und $\alpha \in K$ gilt.

b) Sei das LGS $Ax + b = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.98 \\ 0.98 & 0.97 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1.97 \\ -1.95 \end{pmatrix}$$

gegeben. Lösen Sie das System und berechnen Sie die Spektralkonditionszahl von A.

c) Betrachten Sie das bzgl. b) gestörte LGS $(A + \Delta A)(x + \Delta x) + (b + \Delta b) = 0$ mit

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 0.990005 & 0.979996 \\ 0.979996 & 0.970004 \end{pmatrix}, \quad b + \Delta b = \begin{pmatrix} -1.969967 \\ -1.950035 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einerseits $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ indem Sie vorher das gestörte LGS lösen und schätzen Sie den Bruch andererseits mit Hilfe des Satzes 1.14 ab. Wie gut ist die Abschätzung in diesem Falle?

Aufgabe 6

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 8x_4 &= 11.55 \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 7.35 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3.35 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= -4.55 \end{aligned}$$

mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotierung.

b.w.

Aufgabe 7
Die $n \times n-$Matrizen

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

heißen elementare untere Dreiecksmatrizen.

(i) Berechnen Sie L_i^{-1}.

(ii) Beweisen Sie: $L_1 \cdot L_2 \cdots L_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8

(i) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Lösen Sie mit Hilfe von Teil (i) das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Abgabe: Donnerstag, den 30.10.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.