Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. L. Beutel
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 5.11.2003

Numerische Mathematik I

4. Übung

Aufgabe 13

Das LGS $Ax = b$ ist gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1.02 \\ 1.04 & 1.02 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (unter Verwendung von 3-stelliger Gleitpunktarithmetik) die genäherten Zerlegungsmatrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$, sowie die genäherte Lösung $x^{(0)}$.

(ii) Bestimmen Sie den Defekt $d^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ unter Verwendung von 6-stelliger Gleitpunktarithmetik und die Korrektur $k^{(1)}$ für $x^{(0)}$ als Lösung von $\tilde{L}\tilde{R}k^{(1)} = d^{(0)}$ (3-stellige Gleitpunktarithmetik).

(iii) Vergleichen Sie die Ergebnisse $x^{(0)}$ und $x^{(1)} = x^{(0)} + k^{(1)}$.

Aufgabe 14

Bei den Maschinenoperationen zur Gleitpunktarithmetik bleibt die Kommutativität von Addition bzw. Multiplikation erhalten, während die Assoziativität von Addition bzw. Multiplikation sowie die Distributivität zwischen Addition und Multiplikation im Allgemeinen nicht gelten.

a) Konstruieren Sie entsprechende Gegenbeispiele mit dreistelliger Gleitpunktarithmetik.

b) Gegeben sind die algebraisch äquivalenten Ausdrücke

$$E_1(x) := \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad \text{und} \quad E_2(x) := 1 + x + x^2 + x^3.$$

Berechnen Sie in $\mathbb{R}$ deren gemeinsamen Wert an der Stelle $x_0 = 1.0101$ (mit 8-stelliger Gleitpunktarithmetik).
Anschließend berechnen Sie E_1 und E_2 an der Stelle x_0, indem Sie die Potenzen durch iterierte Multiplikation bestimmen, jedes Mal 5-stellig runden und von links nach rechts aufsummieren.

Aufgabe 15

Zeigen Sie für b mit $\frac{b}{2} \in \mathbb{N}$, dass die Maschinengenauigkeit eps äquivalent zur Definition in der Vorlesung charakterisiert werden kann durch die Beziehung

$$\text{eps} = \min\{\xi \in A : \xi > 0, (1 \oplus \xi) > 1\}.$$

b.w.

Aufgabe 16

Die trigonometrischen Funktionen seien maschinenintern derart realisiert, dass gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SIN}(x) &= \sin(x)(1+\varepsilon) \quad \text{mit } |\varepsilon| \le \text{eps}, \;\; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \mathrm{COS}(x) &= \cos(x)(1+\varepsilon) \quad \text{mit } |\varepsilon| \le \text{eps}, \;\; x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie die Konditionszahl von $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und geben Sie eine möglichst genaue gleichmäßige obere Schranke an.

(ii) Schätzen Sie den relativen Fehler des Ergebnisses von $(\mathrm{COS}(x) \ominus 1) \oslash (x \odot x)$ ab.

(iii) Vermeiden Sie die Subtraktion durch geeignete trigonometrische Umformungen und führen Sie eine erneute Fehleranalyse durch.

Abgabe: Donnerstag, den 13.11.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.