Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. L. Beutel
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 12.11.2003

Numerische Mathematik I

5. Übung

Aufgabe 17 Bestimmen Sie mit dem Cholesky-Verfahren die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & 22 & 11 \\ -4 & 4 & 11 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -19 \\ 25 \\ 53 \\ 83 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18 A sei eine reelle symmetrische Matrix mit positiven Diagonalelementen und sei stark diagonaldominant, d.h.

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ik}| < |a_{ii}|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass A dann positiv definit ist.

Aufgabe 19 A sei eine symmetrische, positiv definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass alle Diagonalelemente positiv sind und dass für $i \neq j$ folgende Ungleichungen gelten:

(i) $|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$,

(ii) $|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii} \cdot a_{jj}}$.

Aufgabe 20 Gegeben ist eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Blockgestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei A quadratisch und invertierbar sei. Das *Schur-Komplement* zu M ist definiert durch $S := D - CA^{-1}B$.

(i) Verifizieren Sie, dass folgende Zerlegung gilt:

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie: Wenn M symmetrisch und positiv definit ist, dann sind auch A und S symmetrisch und positiv definit.

Abgabe: Donnerstag, den 20.11.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.