

## Numerische Mathematik I

### 7. Übung

**Aufgabe 25** Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie die jeweilige Moore-Penrose-Inverse.

**Aufgabe 26** Bestimmen Sie approximierende Polynome  $p$  zur Funktion

$$f(x) = |x|, \quad -2 < x < 2.$$

- (i) Durch Interpolation in den Stützstellen  $x_k = -2 + k$ ,  $k = 0, \dots, 4$ , ist ein Polynom  $p \in \mathcal{P}_4$  zu ermitteln.
- (ii) Mit Hilfe der Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate) bzgl. der Stützstellen  $x_k = -2 + \frac{k}{2}$ ,  $k = 0, \dots, 8$ , ist ein Polynom  $p \in \mathcal{P}_2$  zu bestimmen.

Skizzieren Sie den jeweiligen Funktionsverlauf und vergleichen Sie den Approximationsfehler im Punkt  $\frac{1}{3}$ .

Wie verändert sich Teilaufgabe (ii), wenn  $p \in \mathcal{P}_3$  gesucht ist? (Nicht rechnen!)

**Aufgabe 27** Seien  $x_0, x_1, \dots, x_n$  paarweise verschiedene Knoten aus  $[a, b]$  und  $f \in C^{n+1}[a, b]$ . Zeigen Sie:

- (i) Für die dividierten Differenzen gilt:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_j}.$$

- (ii) Die dividierten Differenzen sind linear in  $f$ , d.h.

$$(f + g)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + g[x_0, \dots, x_n].$$

- (iii) Die dividierten Differenzen sind symmetrisch, d.h.  $f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ , wobei  $\sigma$  eine Permutation der Menge  $\{1, \dots, n\}$  ist.

**Aufgabe 28** Die folgenden Daten sind Funktionswerte eines Polynoms dritten Grades. In der Tabelle verbirgt sich ein falscher Funktionswert. Bestimmen Sie diesen und korrigieren Sie ihn.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	3.6	3.61	3.62	3.63	3.64	3.65	3.66	3.67	3.68
$y_i$	0.112052	0.120208	0.128352	0.136462	0.1446	0.152702	0.160788	0.168857	0.176908

**Abgabe:** Donnerstag, den 4.12.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.