

Numerische Mathematik I

8. Übung

Aufgabe 29 Bestimmen Sie die Hermite'schen Interpolationspolynome an $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

- (i) Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, Daten $y_i^{(0)} := f(x_i), y_i^{(1)} := f'(x_i)$ für $i = 0, 1, 2$.
- (ii) Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, Daten $y_i^{(0)} := f(x_i), y_i^{(1)} := 0$ für $i = 0, 1, 2$.

Aufgabe 30 S bezeichne den Vektorraum der kubischen natürlichen Splinefunktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

- (i) Sind die folgenden Funktionen in S ?

- (a) $f(x) = x^3 - x^2$,
- (b) $f(x) = (x-1)_+^3 - \frac{x^3}{2}$.

- (ii) Bestimmen Sie alle 5-tupel $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, so dass die Funktion

$$s(x) := a(x)_+^3 + b(x-1)_+^3 + c(x-2)_+^3 + dx + e$$

in S ist.

- (iii) Bestimmen Sie die stückweise polynomiale Form des interpolierenden Splines $s_2 \in S$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0), s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 31 Sei $\{x_0 + ih\}_{i \in \mathbb{Z}}$ eine äquidistante Knotenfolge mit Schrittweite h .

- (i) Bestimmen Sie die stückweise polynomiale Form des quadratischen normalisierten B-Splines $B_{0,3}$ und verifizieren Sie die Symmetrie-Eigenschaft $B_{0,3}(x_0 + x) = B_{0,3}(x_3 - x)$.
- (ii) Zeigen Sie die "Shiftinvarianz"-Eigenschaft $B_{i,3}(x) = B_{0,3}(x - i \cdot h), i \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 32 Sei $f(x) = \sin(x)$ und $\Delta : x_0 < \dots < x_4$ die Zerlegung von $[0, 2\pi]$ mit $x_k = \frac{2k\pi}{4}, k = 0, \dots, 4$. Bestimmen Sie den

- (i) interpolierenden Spline $s \in S_{1,\Delta}$ mit $s(x_k) = f(x_k), k = 0, \dots, 4$,
- (ii) interpolierenden Spline $s \in S_{2,\Delta}$ mit $s(x_k) = f(x_k), k = 0, \dots, 4$ und $s'(2\pi) = f'(2\pi)$.
Hinweis: Hierbei gilt für die B-Splines $B_{i,3}(x_{i+1}) = B_{i,3}(x_{i+2}) = \frac{1}{2}$ und $B'_{i,3}(x_{i+1}) = -B'_{i,3}(x_{i+2}) = \frac{2}{\pi}$.

Hinweis. Bei größerem rechnerischen Aufwand empfiehlt sich der Einsatz von Matlab.

Abgabe: Donnerstag, den 11.12.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.