Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. C. Scholz
Dipl.-Math. L. Beutel

Dortmund, 10.12.2003

Numerische Mathematik I

9. Übung

Aufgabe 33 Werten Sie das Polynom p mit den Bézier–Koeffizienten $b_0 = 0$, $b_1 = -1$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$ an den Stellen $x = 1/4$, $x = 1/2$ und $x = 3/4$ mit Hilfe des de Casteljau Algorithmus aus und skizzieren Sie jeweils die Lösung.

Aufgabe 34 Der Bernstein–Operator vom Grad n auf $[0,1]$ ist definiert durch

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot P_{n,k}(x), \quad f \in C[0,1],$$

wobei $P_{n,k}$ die Bernstein–Grundpolynome auf $[0,1]$ sind.

(i) Berechnen Sie $B_n(e_i)$, $i = 0,1,2$, wobei e_i die Monome $e_i(x) = x^i$ bezeichnen. Reproduziert B_n lineare (bzw. quadratische) Funktionen ?

(ii) Bestimmen Sie, an welcher Stelle das Grundpolynom $P_{n,k}$ seinen Maximalwert annimmt.

Aufgabe 35 Beweisen Sie folgende Formeln.

(i) $\displaystyle\int_0^1 P_{n,k}(x)\,dx = \frac{1}{n+1}$.

(ii) $P_{n,k}(x) = \frac{n+1-k}{n+1} P_{n+1,k}(x) + \frac{k+1}{n+1} P_{n+1,k+1}(x)$.

Aufgabe 36 Der Dirichlet–Kern wird durch

$$\tilde{D}_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} & x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\tilde{D}_n \in \mathcal{T}_n$.

(iii) Das trigonometrische Interpolationspolynom $t_n(x)$ zu den Stützstellen $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $0 \leq k \leq 2n$, und Daten $y_k \in \mathbb{R}$, läßt sich schreiben als

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k \cdot \tilde{D}_n(x - x_k).$$

Abgabe: Donnerstag, den 18.12.2003, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.