Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 15. Oktober 2003

Analysis III

1. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 20. Oktober 2003, 12.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die Astroide $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$, und berechnen Sie ihre Länge.

Aufgabe 2

Auf dem Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ rollt aussen ein zweiter Kreis K mit Radius 1 in mathematisch positiver Richtung ab.

a) Weisen Sie geometrisch nach, dass durch $\gamma(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)^T$ eine Parameterdarstellung der Bahnkurve gegeben ist, die der auf K gelegene Punkt P zurücklegt, der zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten $(1, 0)$ hat.

b) Berechnen Sie die Länge des von P in einem Umlauf zurückgelegten Weges.

Aufgabe 3

Es sei $r \in C^1[0, \infty)$ positiv und streng monoton fallend mit $r(t) \to 0$ für $t \to \infty$, und $s(\theta)$ sei die Länge der Polarkurve $\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)^T$, $0 \le t \le \theta$.

a) Zeigen Sie, dass $s(\infty) := \lim_{\theta\to\infty} s(\theta)$ genau dann existiert, wenn $\int_0^\infty r(t)\,dt < \infty$ ist.

b) Berechnen Sie $s(\theta)$ und $s(\infty)$ für die logarithmische Spirale γ mit $r(t) = e^{-at}$ $(a > 0)$ und parametrisieren Sie γ nach der Bogenlänge.

Hinweis zu a): Es gilt $r(t)^2 + r'(t)^2 \le (r(t) - r'(t))^2$.

Aufgabe 4

Es sei $\gamma : [0, 1) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, für die jeder Weg $\gamma_\tau : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_\tau(t) = \gamma(t)$ für $0 \le t \le \tau < 1$ rektifizierbar ist mit $L(\gamma_\tau) \le M$. Zeigen Sie, dass $\gamma(1) := \lim_{t\to 1} \gamma(t)$ existiert und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg ist.