Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 24. Oktober 2003

Analysis III

3. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 3. November 2003, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

a) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{z}{(iz+1)(z-1)^2}\,dz$ b) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{z^2}{z^2+1}\,dz$ c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{z^2+1}\,dz$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils das 2-dimensionale Maß

a) der von der Astroiden (siehe 1. Übungsblatt, Aufgabe 1) eingeschlossenen Fläche,

b) des Sektors, der von der Polarkurve γ mit $r(t) = c^t$, $\frac{2}{3}\pi \le t \le \frac{7}{4}\pi$, $(c > 0)$ und den Strecken von $(0,0)$ nach $\gamma\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ bzw. $\gamma\left(\frac{7}{4}\pi\right)$ berandet wird.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit dem Integralsatz von Gauß die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} (e^y - x^3y^3)\,dx + (xe^y + x^4y^2)\,dy$ mit $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$ $(a, b > 0)$

b) $\displaystyle\int\limits_{D} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,d(x,y)$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3,\ x, y > 0\}$

Aufgabe 4

Für festes $0 < \delta < 1$ sei u harmonisch in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 - \delta\}$ und für $r \ge 1$ sei

$$\varphi(r,t) := u(r\cos t, r\sin t).$$

Wenden Sie die 2. Greensche Formel auf $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$ und $v(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ an und zeigen Sie damit für $r > 1$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(r,t)\,dt - r\log r \int\limits_0^{2\pi} \varphi_r(r,t)\,dt = const.$$