Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 14. November 2003

Analysis III

6. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 24. November 2003, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Zeigen Sie für $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ folgende Aussagen:

a) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$

b) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$

c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$

d) $\operatorname{rot}(uf) = u \operatorname{rot} f + (\nabla u) \times f$

Aufgabe 2

Gegeben seien das Paraboloid $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + z = 1, z \geq 0\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (y, z, x)$. Berechnen Sie

$$\int_P \operatorname{rot} f \cdot \nu \, do$$

a) direkt und

b) mit dem Integralsatz von Stokes.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie für folgende Differentialgleichungen das Richtungsfeld in dem angegebenen Bereich und berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung:

a) $x' = \dfrac{t}{t^2 - 1}\, x \qquad -1 < t < 1,\ -1 < x < 1$

b) $x' = -x \cos t + \sin 2t \qquad -\pi < t < \pi,\ -2 < x < 2$

Aufgabe 4

Es sei x eine Lösung der Differentialgleichung $x' = \sin x$ in $[0, T]$ mit $0 < x(0) < \pi$. (Versuchen Sie nicht, eine solche Lösung zu bestimmen!)

a) Skizzieren Sie im Bereich $0 \leq t \leq 4$, $-\pi \leq x \leq 2\pi$ das Richtungsfeld, die Nullklinen und zu einem $0 < x(0) < \pi$ die Lösung x.

b) Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis, dass $0 \leq x(t) \leq \pi$ für $t \in [0, T]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass x in $[0, T]$ monoton wachsend ist.

Hinweis zu b): Beachten Sie das Richtungsfeld und verwenden Sie den Mittelwertsatz.