Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 21. November 2003

# Analysis III

7. Übungsblatt, WS 2003/04

**Abgabe** bis Montag, 1. Dezember 2003, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

### Aufgabe 1

Skizzieren Sie (selbst oder mit Hilfe von Maple, Mathematica o.ä.) jeweils für folgende Differentialgleichungen das Richtungsfeld im Bereich $-2 \le t \le 2$, $-2 \le x \le 2$, und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem. Bestimmen Sie außerdem das maximale Existenzintervall der Lösung, d.h. das größtmögliche Intervall, auf dem die Lösung existiert.

a) $x' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,x + 1 \qquad x(1) = 0$

b) $x' + 2tx = te^{-t^2} \qquad x(0) = -1$

c) $x' = -\,\alpha\,\dfrac{x}{t} + 1 \qquad x(1) = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und deren maximales Existenzintervall.

a) $x' = e^x \sin t \qquad x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $2x' + x = 2(t-1)x^3 \qquad x(-1) = 2$

c) $x' = \dfrac{\ln t}{t}x^2 - \dfrac{x}{t} \qquad x(1) = \dfrac{1}{2}$

d) $x' = \dfrac{1+x^2}{tx(1+t^2)} \qquad x(1) = -1$

### Aufgabe 3

Finden Sie jeweils durch Hinsehen eine einfache Lösung der folgenden Riccati-Differentialgleichungen und bestimmen Sie dann alle ihre Lösungen:

a) $x' = x^2 - \dfrac{2}{t^2}$

b) $x' = x^2 - (2t+1)x + 1 + t + t^2$

### Aufgabe 4

Es seien $f$ eine auf dem Intervall $I = (-1, 1)$ stetige Funktion und $x$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t)\cos x$ in $I$. Zeigen Sie:

a) Ist $f \ge 0$ auf $I$, so ist $x$ dort monoton.

b) Ist $f$ ungerade, so ist $x$ gerade.