Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 28. November 2003

Analysis III

8. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 8. Dezember 2003, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Skizzieren Sie (selbst oder mit Hilfe von Maple o.ä.) jeweils für folgende Differentialgleichungen das Richtungsfeld im Bereich $-4 \leq t \leq 4$, $-4 \leq x \leq 4$, lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall der Lösung:

a) $x' = \dfrac{\sqrt{t^2+x^2}+x}{t}, \; x(1) = 0$

b) $x' = \cos^2(x+t+2) - 1, \; x(-2) = \dfrac{\pi}{4}$

c) $x' = -\dfrac{2x+t-1}{3x+2t+1}, \; x(-5) = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 2

a) Stellen Sie ein Lotka-Volterra-Modell für konkurrierende Populationen auf. Dabei sei x die Population von Schafen, y die von Kaninchen (Schafe verdrängen Kaninchen).

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), x(\tau) = \xi_0, \ldots, x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1}$$

äuivalent zu folgender Integralgleichung ist:

$$x(t) = \xi_0 + \cdots + \frac{\xi_{n-1}}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} + \int_\tau^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} g(s, x(s), \ldots, x^{(n-1)}(s))\, ds$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $x'' = 2te^{t^2-x'}, \; x(1) = 0, \; x'(1) = 1$

b) $4\sqrt{x}x'' = 1, \; x(\frac{4}{3}) = 1, \; x'(\frac{4}{3}) = 1$

c) $2xx'' = -(x')^2, \; x(0) = 1, \; x'(0) = \frac{2}{3}$

Aufgabe 4

Überprüfen Sie für folgende Funktionen f in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Lipschitzbedingung bzgl. x bzw. die lokale Lipschitzbedingung bzgl. x:

a) $f(t,x) = t + xt + x^2$

b) $f(t,x) = t + \sqrt[3]{x^2}$

c) $f(t,x) = \arctan x$

Berechnen Sie mit der Funktion in a) ausgehend von $\Phi_0 \equiv 1$ die nächsten beiden Picard-Iterierten für das Anfangswertproblem $x' = f(t,x), \; x(0) = 1$.