Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 5. Dezember 2003

Analysis III

9. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 15. Dezember 2003, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f(t, x_1, x_2, x_3) = (x_2 x_3, -x_1 x_3, 2)^T$.

a) Zeigen Sie, daß f einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. x genügt.

b) Lösen Sie $x' = f(t, x),\ x(0) = (0, 1, 0)^T$, durch sukzessive Approximation.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie für nachfolgende Funktionen $f(t, x)$ die Standardvorraussetzung und stellen Sie fest, ob die Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x),\ x(0) = 0$, gerade, ungerade oder nicht symmetrisch ist:

a) $\sin(tx) + t^3$ b) $\cos(tx)$ c) $t^3 + x^3$

Geben Sie eine Bedingung für f an, die eine gerade bzw. ungerade Lösung garantiert.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden inhomogenen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2t^2-1}{t(t^2-1)}\,x - \frac{t}{t^2-1}\,y + t \\ y' &= \frac{-1}{t(t^2-1)}\,x + \frac{t}{t^2-1}\,y + t \end{aligned}$$

Hinweis: Das homogenen System besitzt eine Lösung mit $x = y$.

Aufgabe 4

Es seien $X(t)$, $Y(t)$ Fundamentalmatrizen von folgenden Differentialgleichungssystemen:

$$\begin{aligned} x' &= A(t)\ x \\ y' &= -A^T(t)\, y \end{aligned}$$

Zeigen Sie (mit der für quadratische Matrizen gültigen Produktregel), dass $Y^T(t)X(t)$ eine konstante Matrix ist.