Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 16. Dezember 2003

Analysis III

10. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 5. Januar 2004, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie (jeweils mit einer geeigneten Methode) ein möglichst großes Existenzintervall für die jeweiligen Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $x' = t^2 + x^2,\ x(0) = 0$ b) $x' = \cos(t^2 + x^2),\ x(0) = 2004$ c) $x' = te^x,\ x(1) = 1$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit einem Potenzreihenansatz für $x'' - tx = 0$ ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 3

Es sei die Differentialgleichung $x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x = 0$ gegeben und $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

a) Zeigen Sie mit $a_0 = 1, a_1 = 0$, dass e^{t^2} eine Lösung ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsverfahrens ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(t,x) := \begin{cases} 2t & x < 0 \\ 2t - 2\dfrac{x}{t} & 0 \le x < t^2 \\ 0 & x \ge t^2 \end{cases},$$

und das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(0) = 0$. Skizzieren Sie das Richtungsfeld im Bereich $-2 \le t \le 2,\ -2 \le x \le 2$ und zeigen Sie:

a) f ist stetig, genügt aber in $(0,0)$ bezüglich x keiner lokalen Lipschitzbedingung.

b) Die Folge der Picard-Iterierten ausgehend von $\Phi_0 \equiv 0$ besitzt zwei konvergente Teilfolgen, deren Grenzfunktionen nicht Lösungen des Anfangswertproblems sind.

c) Ist x eine Lösung dieses Anfangswertproblems, so gilt $0 \le x(t) \le t^2$ für $t > 0$. (Führen Sie die Existenz von $t_0 > 0$ mit $x(t_0) < 0$ bzw. $x(t_0) > t_0^2$ zum Widerspruch.)

d) Es existiert genau eine Lösung auf $\mathbb{R}$. Wie lautet diese?

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr x!
(Dabei sei x die Lösung von $x' = \sin\frac{\pi x}{2004},\ x(0) = 2004$.)