

Analysis III

11. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 12. Januar 2004, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie Real-, Imaginärteil, Argument und Betrag von:

$$(i) \frac{(2i+1)(i-2)+1}{(2-i)^2-2+i} \quad (ii) (1+i)^n + (1-i)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

b) Bestimmen und skizzieren Sie jeweils die folgenden Mengen:

$$(i) \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1 \right\}, \quad |a| < 1 \quad (ii) \left\{ z + \frac{1}{z} : |z| = r \right\}, \quad r \geq 1$$

Aufgabe 2

Es seien D ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 > 0$.

- Zeigen Sie, daß mit $|f|$ bzw. $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ auch f konstant ist.
- Entscheiden Sie, ob f konstant ist, falls $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f'$ gilt.
- Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{Re} f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so existieren $c \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = icz + \alpha.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \int_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2 + \frac{\pi}{2}} dz \quad b) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)} dz \quad c) \int_{|z|=1} e^z (z-a)^n dz \quad (|a| \neq 1, n \in \mathbb{Z})$$

Hinweis: Beachten Sie dazu auch das 3. Übungsblatt.

Aufgabe 4

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten harmonisch sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine konjugiert harmonische Funktion.

- $u(x+iy) = e^y \cos x$ in \mathbb{C}
- $u(z) = \log |z|^2$ in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ bzw. in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$