Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 9. Januar 2004

Analysis III

12. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 19. Januar 2004, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben seien die Möbiustransformation $T(z) = (i+1)\,\dfrac{z-1}{iz-1}$ und die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| < 1\}.$$

Bestimmen Sie das Bild von D unter T und skizzieren Sie D und $T(D)$.

Aufgabe 2

Stellen Sie die Funktion $f(z) = \tan z$ als Kompostion einer Möbiustransformation mit e^{2iz} dar und bestimmen Sie damit das Bild von S unter f, wobei S der folgende Streifen ist:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Geben Sie dann mit Hilfe des Logarithmus explizit die zugehörige Umkehrfunktion an.

Aufgabe 3

Es seien $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und T eine Möbiustransformation, die H invariant lässt. Zeigen Sie mit Hilfe des Doppelverhältnisses, dass $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc > 0$ existieren, sodass gilt:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Aufgabe 4

Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden und $\lambda := (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Zeigen Sie:

a) Werden z_j, z_{j+1} vertauscht, so ist das entstehende Doppelverhältnis $1-\lambda$ oder $\frac{1}{\lambda}$.

b) Lassen sich die z_j durch eine Möbiustransformation auf die Ecken eines Quadrats abbilden, so ist $\lambda \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

c) Ist $(z_1, z_2, z_3, z_4) = -1$ und T die Möbiustransformation, die z_2, z_3, z_4 auf $i+1, i, 1$ abbildet, so ist $T(z_1) = 0$.