Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 16. Januar 2004

# Analysis III

13. Übungsblatt, WS 2003/04

**Abgabe** bis Montag, 26. Januar 2004, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils

a) eine konforme Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

b) alle Möbiustransformationen der rechten Halbebene auf $\mathbb{D}$,

c) eine Möbiustransformation $T$, die die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z - 1\}$ auf $\mathbb{D}$ abbildet mit den Eigenschaften $T(-i) = 0,\ T'(-i) > 0$.

### Aufgabe 2

Es sei $f$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

a) Ist der Realteil von $f$ positiv, so ist $f$ konstant.

b) Gibt es $r, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ für $|z| \geq r$, so ist $f$ ein Polynom.

### Aufgabe 3

Untersuchen Sie jeweils, ob eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion $f$ existiert, sodass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

a) $f\left(\dfrac{i^n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} = f\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ c) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3} = f\left(-\dfrac{1}{n}\right)$

### Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf isolierte Singularitäten in $\mathbb{C}$ und bestimmen Sie jeweils den Typ der Singularität:

a) $\dfrac{e^z - 1}{z^2(iz + 2\pi)}$ b) $\dfrac{\sin z}{\sinh z}$ c) $z \cos \dfrac{1}{z}$ d) $\dfrac{z^2}{e^{z^3} - 1}$

*Zusatz:* Wie lässt sich der Singularitätenbegriff auf den Punkt $\infty$ übertragen? In welchen der obigen Funktionen ist $\infty$ eine isolierte Singularität und welcher Typ liegt vor?