Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 23. Januar 2004

Analysis III

14. Übungsblatt, WS 2003/04

Abgabe bis Montag, 2. Februar 2004, 12.00 Uhr, in den Kasten im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f. Zeigen Sie:

a) Ist z_0 nicht hebbar, so besitzt $e^{f(z)}$ in z_0 eine wesentliche Singularität.

b) Ist für ein $r > 0$ der Realteil von f in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ nach oben beschränkt, so ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

Aufgabe 2

Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit:

$$f(z) = cg(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie eine möglichst große Kreisscheibe $\{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$, in der die Funktion $f(z) = \sin z$ eine Umkehrfunktion besitzt, die 0 auf 0 abbildet.

b) Zeigen Sie, dass es keine konforme Abbildung der oberen Halbebene auf $\mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie das lokale Abbildungsverhalten von

a) $\dfrac{1}{1 - z^4}$ in $z = 0$,

b) $z^3 - 3z^2 + 6z$ in allen Punkten der Ebene.