Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

— Übungen —

Blatt 10 WS 2003/2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, dann heißt $r \in R$ ein rechter Nullteiler, falls ein $s \in R \setminus \{0\}$ mit $s \cdot r = 0$ existiert. Entsprechend heißt $r \in R$ ein linker Nullteiler, wenn ein $s \in R \setminus \{0\}$ mit $r \cdot s = 0$ existiert.

Es sei V eine endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man bestimme alle rechten und alle linken Nullteiler des Endomorphismenrings von V.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -29 & -9 & -28 \\ 22 & 26 & 20 \\ -5 & -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, ob A invertierbar ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls A^{-1}.
b) Bestimmen Sie alle reellen Matrizen X, die der folgenden Gleichung genügen

$$AX = B.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{C}^3$ werde die lineare Abbildung $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathbf{i} & 1 & -\mathbf{i} \\ 4-2\mathbf{i} & 0 & 1+\mathbf{i} \\ 6 & 2 & 1-\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des Kernes von L.
b) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von L.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$ werde die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basen

$$a_1 = (1,2,3,4),\ a_2 = (-1,0,4,-8),\ a_3 = (2,1,-1,4),\ a_4 = (4,3,2,1) \qquad \text{von } \mathbb{R}^4 \qquad \text{und}$$
$$b_1 = (5,-6,7),\ b_2 = (-3,4,-4),\ b_3 = (-1,1,1) \qquad \text{von } \mathbb{R}^3.$$

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Mittwoch, 14.01.2004, 10:00 Uhr.