Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf
Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

— Übungen —

Blatt 11 WS 2003/2004

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und L_0 ein Endomorphismus von V.
Zeigen Sie:

Ist L_0 vertauschbar mit allen Endomorphismen L von V, so ist L_0 eine Streckung oder die Nullabbildung, d.h. es exisitert ein $\lambda \in K$ mit $L_0 = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Anleitung: Nutzen Sie aus, dass L_0 insbesondere mit allen Projektionen auf eindimensionale Untervektorräume von V vertauschbar ist.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Es seien

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{i} := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

a) Bestimmen Sie die von den Elementen $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ erzeugte Untergruppe $Q_8 \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

b) Wir betrachten die Menge

$$Q := \{r_1\mathbf{1} + r_2\mathbf{i} + r_3\mathbf{j} + r_4\mathbf{k} \ \mid\ r_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^{(2,2)}.$$

Zeigen Sie, dass Q mit der in $\mathbb{C}^{(2,2)}$ definierten Addition und Multiplikation einen Schiefkörper bildet. Dieser heißt der Quaternionenschiefkörper.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $h \in G$ ein Element aus G. Wir definieren

$$\varphi_h : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & hgh^{-1} \end{array}.$$

a) Zeigen Sie, dass φ_h ein Gruppenautomorphsimus der Gruppe G ist.

b) Es sei nun speziell $G = \mathfrak{S}_n$. Zeigen Sie, dass für einen Zykel $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ der Länge $l \le n$, d.h. $\sigma = (i_1, \ldots, i_l)$, das Element $\varphi_\tau(\sigma) \in \mathfrak{S}_n$ wieder ein Zykel der Länge l ist, wobei $\tau \in \mathfrak{S}_n$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $U := \mathbb{R}^2$ mit den zwei Basen

$$\mathfrak{A} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \tilde{\mathfrak{A}} := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

sowie den reellen Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ mit den zwei Basen

$$\mathfrak{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \tilde{\mathfrak{B}} := \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ferner sei eine lineare Abbildung $L : U \to V$ gegeben durch

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

a) Die Darstellungsmatrix der Basistransformation $\beta : U \to U$ zum Basiswechsel von $\mathfrak{A}$ zu $\tilde{\mathfrak{A}}$ (bzgl. der Basis $\mathfrak{A}$ von U).

b) Die Darstellungsmatrix S der zugehörigen Koordinatentransformation $\kappa : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (bzgl. der Standardbasis im $\mathbb{R}^2$).

c) Die Darstellungsmatrix der Basistransformation zum Basiswechsel von $\mathfrak{B}$ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ (bzgl. der Basis $\mathfrak{B}$ von V).

d) Die Darstellungsmatrix R der zugehörigen Koordinatentransformation (bzgl. der Standardbasis im $\mathbb{R}^3$).

e) Die Darstellungsmatrix A von L bzgl. der Basen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

f) Die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von L bzgl. der Basen $\tilde{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Skizze:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & U \arrow[l, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\psi"] & V \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[rrr, bend right, "\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "\tilde{x}=Sx"'] \arrow[r, "y=Ax"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\tilde{y}=Ry"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Mittwoch, 21.01.2004, 10:00 Uhr.