Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf
Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

— Übungen —

Blatt 3 WS 2003/2004

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Analog zu Aufgabe 3 vom Blat 2 untersuchen Sie die vier Verbindungsgeraden der Ecken mit den gegenüberliegenden Seitenschwerpunkten in einem Tetraeder. Zeigen Sie, dass diese vier Geraden stets einen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Bestimmen Sie

a) diejenigen Einheitsvektoren u und v, die mit $(0,1,0)$ den Winkel $\frac{\pi}{3}$ und mit $(0,0,1)$ den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschliessen und

b) die beiden zu u und v orthogonalen Einheitsvektoren.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^4$ seien eine Gerade g und eine Ebene E wie folgt gegeben

$$g = \{(-6,2,-3,5) + \lambda(4,3,-4,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$
$$E = \{(1,1,1,2) + \mu(1,-3,0,0) + \nu(1,2,0,0) \mid \mu,\nu \in \mathbb{R}\}.$$

a) Berechnen Sie die Schnittmenge von g mit E.

b) Konstruieren Sie eine Ebene E', deren Richtungsvektoren senkrecht auf der Ebene E stehen und die durch den Punkt $P = (-6,2,-3,5)$ geht.

c) Berechnen Sie die Schnittmenge von E mit E' (aus Teilaufgabe c).

d) Geben Sie den Winkel an, in dem die Gerade g die Ebene E schneidet.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Es sei H eine nicht leere Menge mit einer inneren Verknüpfung $\boxdot$ mit den Eigenschaften

H1) für alle $h_1, h_2, h_3 \in H$ gilt: $(h_1 \boxdot h_2) \boxdot h_3 = h_1 \boxdot (h_2 \boxdot h_3)$

H2) es existiert ein Element $e \in H$ mit: $h \boxdot e = h$ für alle $h \in H$

H3) für alle $h \in H$ existiert ein $h^\star \in H$ mit: $h \boxdot h^\star = e$

Zeigen Sie, dass $(H, \boxdot)$ eine Gruppe ist.

(Tipp: Zuerst zeigen Sie $h^\star \boxdot h = e$, wobei Sie $h^\star \boxdot (h^\star)^\star = e$ benutzen sollten.
Hieraus folgern Sie dann, dass $e \boxdot h = h$ für alle $h \in H$ gilt.)

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Mittwoch, 5.11.2003, 10:00 Uhr.