Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

— Übungen —

Blatt 7 WS 2003/2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und es seien $W_1,\ W_2 \subset V$ zwei Untervektorräume. Untersuchen Sie die folgenden Mengen daraufhin, ob sie Untervektorräume von V sind:

a) $W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in W_1 \text{ und } x \in W_2\}$.
b) $W_1 \cup W_2 = \{x \mid x \in W_1 \text{ oder } x \in W_2\}$.
c) $W_1 \setminus W_2 = \{x \mid x \in W_1 \text{ und } x \notin W_2\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}^5$ und der Untervektorraum $U \subset V$, der sich als Lösungsmenge des folgenden homogenen LGS ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & & & - & x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & & & + & 10x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
-2x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0
\end{array}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U.
b) Geben Sie eine Basis eines Komplementärraumes U' von U in V an, d.h. es gilt

$$V = U \oplus U'.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten den von den Elementen $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}\ \in \mathbb{R}$ erzeugten $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V \subset \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Vektoren $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ in V $\mathbb{Q}$-linear unabhängig sind.
Welche Dimension besitzt V somit als $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Ferner sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum. Wieviele Elemente besitzt V?
b) Es sei L ein Körper und $K \subset L$ ein Unterkörper. Zeigen Sie, dass L zusammen mit der Addition von L und der auf $K \times L$ eingeschränkten Multiplikation von L ein Vektorraum über K ist.
c) Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und es sei $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}$ ein Unterkörper mit p Elementen, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente von $\mathbb{F}$ eine Potenz von p ist.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Mittwoch, 03.12.2003, 10:00 Uhr.