Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf

Universität Dortmund

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

— Übungen —

Blatt 8 WS 2003/2004

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei V eine n-dimensionaler Vektorraum und $U_i \subset V,\ 1 \leq i \leq p$, seien Untervektorräume. Zeigen Sie:

a) $\dim(U_1 + \ldots + U_p) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2) + \ldots + \dim(U_p)$,

b) $\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_p) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) + \ldots + \dim(U_p) - n(p-1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

über den Körper K mit

a) $K = \mathbb{Q}$, b) $K = \mathbb{F}_2$, c) $K = \mathbb{F}_3$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektroraum, U_1, U_2 Untervektorräume von $V,\ u_1, u_2 \in V$ und $T_1 := u_1 + U_1$ sowie $T_2 := u_2 + U_2$ affine Unterräume von V. Welche der folgenden Äquivalenzen gelten?

a) $T_1 = T_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2,\ U_1 = U_2$.

b) $T_1 = T_2 \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in U_1,\ U_1 = U_2$.

c) $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear als Abbildungen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, welche nicht?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (-x, |y|)$.

b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (y - x, 0, x - y)$.

c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto (x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}}$.

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y) \mapsto (x + y, x, -y, x^2 - y^2)$.

Ferner bestimmen Sie für die linearen f_i eine Basis des Kernes und eine Basis des Bildes von $f_i,\ (i = 1, \ldots, 4)$.

Punkte: Insgesamt sind 16 Punkte erreichbar.

Abgabe: Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Mittwoch, 10.12.2003, 10:00 Uhr.