Prof. Dr. Franz Kalhoff
Michael Kropf
Universität Dortmund

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

## — Übungen —

Blatt 9 | Weihnachtszettel | WS 2003/2004

**Bemerkungen zum Weihnachtszettel:**
Der Pflichtanteil liegt - wie immer - bei 8 Punkten. Sie können aber insgesamt 24 Punkte und somit 8 zusätzliche Punkte erhalten (ein kleines Weihnachtsgeschenk).

### Aufgabe 1

( 4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper. Wir betrachten in $K^{\mathbb{N}_0}$ folgende Teilmengen

$$\Pi := \{p \in K^{\mathbb{N}_0} \mid p(i) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i \in \mathbb{N}_0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\Pi \subset K^{\mathbb{N}_0}$ ein Untervektorraum ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$,

$$\Pi_n := \left\{p \in K^{\mathbb{N}_0} \mid p(i) = 0 \text{ für alle } i > n\right\},$$

ein Untervektorraum von $\Pi$ ist. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\Pi_n$.

Wir schreiben jetzt die Elemente $p \in \Pi$ formal als (endliche) Summe

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} p(i) X^i := p$$

und nenne sie **Polynome über** $K$, (z.B. bezeichnet der Ausdruck $p = X^2 + 5X^1 + 3X^0$ das Polynom $p \in \Pi$ mit $p(2) = 1,\ p(1) = 5,\ p(0) = 3$ und $p(i) = 0$ sonst). Das größte $i \in \mathbb{N}_0$ mit $p(i) \neq 0$ heißt der **Grad** von $p$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear sind.

$$\begin{aligned} L_1 : \Pi \to \Pi\ , &\quad \sum_{i \in \mathbb{N}_0} p(i) X^i \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} i p(i) X^{i-1}\ , \\ L_2 : \Pi \to K\ , &\quad \sum_{i \in \mathbb{N}_0} p(i) X^i \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}_0} p(i)\ , \\ L_3 : \Pi \to \Pi\ , &\quad \sum_{i \in \mathbb{N}_0} p(i) X^i \mapsto X^0\ . \end{aligned}$$

### Aufgabe 2

( 4 Punkte)

Es seien $V$ und $W$ zwei $K$- Vektorräume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für beliebige $v_1, \ldots, v_k \in V$ ist $L(\mathrm{sp}(v_1, \ldots, v_k)) = \mathrm{sp}(L(v_1), \ldots, L(v_k))$.

b) Ist $U$ ein Untervektorraum von $V$, so ist $L(U)$ ein Untervektorraum von $W$.

c) Ist $Z$ ein Untervektorraum von $W$, so ist $L^{-1}(Z) := \{v \in V \mid L(v) \in Z\}$ ein Untervektorraum von $V$.

d) Für Untervektorräume $U_1$ und $U_2$ von $V$ gilt:

$$L(U_1 + U_2) = L(U_1) + L(U_2).$$

bitte wenden

**Aufgabe 3** ( 4 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{F}_p$ für ein primes $p \in \mathbb{N}$. Ein *linearer Code der Länge $n$ über $K$* ist ein Untervektorraum des $K$-Vektorraumes $K^n$. Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen des $K^n$ lineare Codes sind und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Elemente und gegebenenfalls ihre Dimension!

*a)* $\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in K^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\right\}$, *b)* $\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in K^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n^2\right\}$,

*c)* $\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in K^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$, *d)* $\left\{(x_1,\ldots,x_n) \in K^n \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\right\}$,

*e)* $\left\{\lambda(1,\ldots,1) \in K^n \;\middle|\; \lambda \in K\right\}$, *f)* $\left\{ x \in K^7 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x_3 + x_5 + x_6 + x_7 & = & 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_7 & = & 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_7 & = & 0 \end{array} \right\}$.

**Aufgabe 4** ( 4 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{F}_p$ für ein primes $p \in \mathbb{N}$ und $C$ ein linearer Code der Länge $n$ über $K$. Das *Gewicht* eines Elementes $c \in C$ ist definiert durch

$$w(c) := |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid c_i \neq 0\}|$$

und der *Minimalabstand* von $C$ als

$$d_{\min}(C) := \min\{w(c) \mid 0 \neq c \in C\}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich je zwei verschiedene Elemente von $C$ an mindestens $d_{\min}(C)$ Koordinaten voneinander unterscheiden.

b) Bestimmen Sie den Minimalabstand der linearen Codes aus Aufgabe 3.

**Aufgabe 5** ( 4 Punkte)

Wählen Sie zu den folgenden linearen Abbildungen je eine Basis der beteiligten Vektorräume und bestimmen Sie bezüglich dieser Basen je eine Matrixdarstellung der linearen Abbildungen. Welche dieser Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,0) \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y-x,0,x-y) \end{array},$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \Pi_5 & \to & K \\ \sum\limits_{i=0}^{5} p(i)X^i & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{5} p(i) \end{array}, \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \Pi_6 & \to & \Pi_5 \\ \sum\limits_{i=0}^{6} p(i)X^i & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{5} (i+1)p(i+1)X^i \end{array}.$$

**Aufgabe 6** ( 4 Punkte)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$(1), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Produkt von je zwei dieser Matrizen und jeder dieser Matrizen mit sich selbst, sofern es definiert ist.

**Punkte:** Insgesamt sind 24 Punkte erreichbar, der 50% Anteil liegt aber bei 8 Punkten.

**Abgabe:** Einwurf in den Briefkasten in der Eingangshalle bis spätestens Mittwoch, 07.01.2004, 10:00 Uhr.