Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 20. April 2004

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übungsblatt, SS 2004

Keine Abgabe, mündliche Vorbereitung bis Montag, 26. April 2004.

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{t}$ eine Lösung der folgenden Riccati-Differentialgleichung ist:

$$x' = \frac{3}{t}x - x^2 - \frac{3}{t^2}$$

Lösen Sie diese durch schrittweise Transformation in zwei andere DGL-Typen.

b) Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

1) $x'' = \frac{x}{4} - \frac{1}{4x^3}$ $\qquad x(1) = 1,\ x'(1) = 1$

2) $x'' = 2x'\sqrt{x' - 2x - 3} + 2x'$ $\qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 4$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = ax - bx^3$ $(\star)$ mit reellen Konstanten $a, b > 0$.

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld für $a = 4$ und $b = 1$ in $-3 \leq t \leq 3$, $-3 \leq x \leq 3$.

(b) Sei x eine Lösung von $(\star)$ mit $x(0) = x_0$. Argumentieren Sie allein mit Hilfe des Richtungsfeldes, wie sich $x(t)$ für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von x_0 verhält.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Picard-Iterierten $\Phi_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, für das Anfangswertproblem

$$x' = 1 + 2tx - x^2,\ x(0) = 0,$$

sowie die Taylorpolynome $T_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, der Lösung um den Punkt $t = 0$.

Aufgabe 4

Leiten Sie für das Anfangswertproblem $x'' = \frac{x}{1-t},\ x(0) = a_0,\ x'(0) = a_1$ mit dem Ansatz

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n her. Zeigen Sie, dass (a_n) eine beschränkte Folge (sogar eine Nullfolge) ist und dass eine Lösung des obigen Anfangswertproblems mindestens im Intervall $(-1, 1)$ existiert.