

Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 7. Mai 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Euler-Differentialgleichung $x^3 y''' - x^2 y'' + 3xy' - 4y = f(x)$. Geben Sie

- für $f(x) = 0$ mit dem Ansatz $y = x^\lambda$ ein Fundamentalsystem und
- für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, einen geeigneten Ansatz zur Bestimmung einer speziellen inhomogenen Lösung an. Lösen Sie die Differentialgleichung für $f(x) = 5x^3 + x$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils eine Fundamentalmatrix X von $x' = Ax$ für folgende Matrizen A :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 12 \\ -9 & -2 & -9 \\ -9 & -2 & -11 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils in Abhängigkeit der auftretenden Parameter das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$:

$$\text{a) } f(t, x) = \frac{x}{t} + tx^3 \qquad \text{b) } f(t, x) = \alpha tx^2$$

Aufgabe 4

Es sei $u := [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie in Analogie zum Lemma von Gronwall:

$$\text{a) } u(t) \leq e^{-t} + 2 \int_0^t e^{s-t} u(s) ds \quad \Rightarrow \quad u(t) \leq e^t$$
$$\text{b) } u(t) \leq t^2 + \int_0^t 4su(s) ds \quad \Rightarrow \quad u(t) \leq \frac{1}{2} (e^{2t^2} - 1)$$