

Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 21. Mai 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

- Beweisen Sie den Monotoniesatz nach links.
- Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $x' = t^3 + x^2$ und zeigen Sie, dass die Lösung x mit Anfangswert $x(0) = 1$ nach links für alle $t < 0$ existiert.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $x' = t(t^2 - x^4)$ und zeigen Sie für die Lösung x mit Anfangswert $x(0) = \xi \in \mathbb{R}$:

- x ist eine gerade Funktion.
- Existiert ein $t_0 > 0$ mit $x(t_0) = \pm\sqrt{t_0}$, so ist $\pm\sqrt{t_0} < x(t) < \sqrt{t}$ für $t > t_0$.
- Ist $\xi > 0$, so existiert x auf ganz \mathbb{R} .

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung

$$x' = \frac{x}{t} + t^3 + x^2$$

genau eine Lösung im Intervall $(-1, 0)$ besitzt, für die $-t^2 \leq x(t) \leq t^2$ gilt.

Aufgabe 4

Es sei x die Lösung des folgenden, nicht explizit lösbaren Anfangswertproblems:

$$x' = x^2 + \sin^2 t + 1, \quad x(0) = 0$$

- Zeigen Sie, dass x nach rechts höchstens bis $\frac{\pi}{2}$ und mindestens bis $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ existiert.
- Was kann über die Existenz nach links ausgesagt werden?

Hinweis zu b): Betrachten Sie $y(t) = -x(-t)$.