

Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Mittwoch, 2. Juni 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem $x' = x + tx^2$, $x(0) = 2$

- die Lösung (auf klassischem Wege) und
- die Potenzreihenlösung. Stellen Sie eine Rekursionsformel für deren Koeffizienten c_n auf und finden Sie mit dem Ansatz $0 < c_n \leq AB^n$ eine Abschätzung für deren Konvergenzradius.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils für folgende Anfangswertprobleme explizit die Potenzreihenlösung und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

- $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 12x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$
- $(2 + t^2)x'' + tx' - x = 0$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 1$
- $x''' - 3tx'' - x' + 3tx = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 1$

Aufgabe 3

Mit der positiv definiten $(n \times n)$ -Matrix A seien für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert:

$$\langle x, y \rangle := x^\top Ay \qquad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Zeigen Sie:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt.
- Für jede differenzierbare Funktion $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\frac{\partial}{\partial t} \|x(t)\|^2 = 2\langle x(t), x'(t) \rangle$.

Aufgabe 4

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} x' &= -x + y^2 \\ y' &= 2y \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen, die in $[0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0]$ beschränkt sind.