

Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 11. Juni 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für folgende Differentialgleichung bzw. für folgendes System die o -Bedingung des Stabilitätssatzes erfüllt ist.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x' = -x + \cos x \cos t - \cos t & \text{b) } \begin{cases} x' = -2x + y + \frac{ty^3}{2+t} \\ y' = -y + \frac{x^2}{\sqrt{1+t}} \end{cases} \end{array}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die konstante Lösung $(1, 1)^\top$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= 1 - x^2 y \\ y' &= 1 - y^2 x \end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^2$ das von der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ erzeugte Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \int_0^\infty (e^{At}x) \cdot (e^{At}y) dt,$$

wobei \cdot das euklidische Skalarprodukt symbolisiert.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie für das lineare autonome System $x' = Ax$ Richtungsfeld und Phasenportrait und entscheiden Sie, ob die Null-Lösung instabil oder (asymptotisch) stabil ist:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$