Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 24. Juni 2004

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 2. Juli 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei S_α das autonome System $x' = g_\alpha(x,y),\ y' = h_\alpha(x,y)$. Geben Sie zu $0 < \alpha < \pi$ ein System S_α an, dessen Trajektorien die des Systems S_0 im Winkel α schneiden.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Nullklinen und stationären Punkte des autonomen Systems

$$\begin{aligned} x' &= -y + xy \\ y' &= x - xy - x^2 \end{aligned}$$

und skizzieren Sie das Richtungsfeld. Zeigen Sie allein anhand dessen, dass die Halbebene $H = \{(x,y) : x > 1\}$, ihre untere Hälfte $Q = \{(x,y) : x > 1,\ y < 0\}$ und deren Hälfte $\Delta = \{(x,y) : x > 1,\ y < 1 - x\}$ vorwärts invariant sind.

b) Es seien $0 < h < 2$ und $0 < r < 2\sqrt{3}$. Zeigen Sie, dass für das autonome System

$$\begin{aligned} x_1' &= -4x_1 + x_2 + x_3 + x_2x_3 \\ x_2' &= -4x_2 + x_3 + x_1 + x_3x_1 \\ x_3' &= -4x_3 + x_1 + x_2 + x_1x_2 \end{aligned}$$

jeder Würfel $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \ :\ |x|_\infty \le h\}$ und jede Kugel $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \ :\ |x| \le r\}$ positiv invariant sind. (Dabei ist $|\cdot|$ die Euklidnorm und $|\cdot|_\infty$ die Maximumnorm.)

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $x' = f(x)$ im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ die folgenden Aussagen:

a) Ist $V \in C^1(D)$ mit $f(x) \cdot \nabla V(x) \le 0$ für $x \in D$, so ist $M = \{x \in D : V(x) \le c\}$ positiv invariant.

b) Sind $M_1, M_2 \subset D$ positiv invariant, so ist auch $M_1 \cap M_2$ positiv invariant.

Aufgabe 4

Gegeben sei das autonome System

$$x' = x - (x+y)(x^2+y^2) \qquad y' = y - (y-x)(x^2+y^2).$$

a) Transformieren Sie das System mit Hilfe von Polarkoordinaten.

b) Lösen Sie das transformierte System. Interpretieren Sie die Lösung in der xy-Ebene.