Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 1. Juli 2004

Gewöhnliche Differentialgleichungen

11. Übungsblatt, SS 2004

Abgabe bis Freitag, 9. Juli 2004, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Transformieren Sie folgende Systeme mit Hilfe von Polarkoordinaten und schließen Sie von dem transformierten System auf die (asymptotische) Stabilität der Null-Lösung.

a) $\begin{aligned} x' &= -y - xy \\ y' &= x + x^2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x' &= -y - x^3 - xy^2 \\ y' &= x - y^3 - x^2y \end{aligned}$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass Hamiltonsche bzw. maßerhaltende Systeme weder Quellen noch Senken besitzen.

b) Sind die stationären Punkte des folgenden Systems (asymptotisch) stabil?

$$x' = 4xy^3 - 2x^3y - 8y \qquad y' = 3x^2y^2 - y^4 + 6x^2$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für folgende Systeme zur Ruhelage 0 eine Ljapunov-Funktion V mit Hilfe des nebenstehenden Ansatzes und untersuchen Sie 0 auf (asymptotische) Stabilität.

a) $\begin{aligned} x' &= y - x^3 \\ y' &= -x - y^3 \end{aligned}$ $\qquad V(x,y) = ax^2 + by^2$

b) $\begin{aligned} x' &= -x + 2y^3 - 2y^4 \\ y' &= -x - y + xy \end{aligned}$ $\qquad V(x,y) = x^{2m} + ay^{2n}$

c) $\begin{aligned} x' &= -x - xy^2 - x^3 \\ y' &= -7y + 3x^2y - 2yz^2 - y^3 \\ z' &= -5z + y^2z - z^3 \end{aligned}$ $\qquad V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $x'' + \mu x' + \sin x = 0$ alle Ruhelagen des äquivalenten Systems S_μ erster Ordnung und zeigen Sie

a) im Fall $\mu = 0$ mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion die Stabilität der Null-Lösung,

b) dass im Fall $\mu > 0$ für geeignetes $a > 0$ durch $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1 + ay\sin x$ eine Ljapunov-Funktion für S_μ gegeben ist. Ist $(0,0)$ asymptotisch stabil?